Μαθημα 3/5/2017

Τοπολογια

Ορισμος

Ο μ.χ (E,ρ) λεγεται πληρης αν.ν $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασικη στο E $\Rightarrow$ η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι συγκλινουσα $(\exists \ell \in E : a_n \xrightarrow{\rho} \ell)$

πχ $(E,\rho)=((0,1],|\cdot|)$ ειναι πληρης

Θεωρω την $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{(\mathbb{R},|\cdot|)} 0$

δηλ $a_n \xrightarrow{|\cdot|} 0$, a_n βασικη στο $\mathbb{R}$ αρα βασικη στο E

Αν $a_n \xrightarrow{(E,\rho)} x \in (0,1] \Rightarrow a_n \xrightarrow{(\mathbb{R},|\cdot|)} x$ ομως

$a_n \xrightarrow{(\mathbb{R},|\cdot|)} 0$ αρα $x=0 \Rightarrow 0 \in (0,1]$

Ορισμος

(E,ρ) μ.χ και $S \neq \emptyset$ και $S \subseteq E$. Το S θα λεγεται πληρες υποσυνολο του E αν.ν ο (S,ρ_S) πληρης

↳ υποχωρος

Προταση

(E,ρ) μ.χ πληρης και $S \neq \emptyset$ κλειστο υποσυνολο του E $\Rightarrow$ S πληρες $\subseteq E$

Αποδειξη

Αρκει (S,ρ_S) πληρης μ.χ

Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$, βασικη στο S και θα δειξω οτι (a_n) στο S συγκλινουσα

βασικη στο $S \overset{\text{ορδ}}{\Rightarrow} (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασικη στο E, ομως (E,ρ) πληρης τοτε $\exists \ell \in E : a_n \xrightarrow{(E,\rho)} \ell$

Εφοσον S κλειστο και $a_n \in S$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \xrightarrow{\rho} \rho \Rightarrow \ell \in S \Rightarrow a_n \xrightarrow{\rho_S} \ell$

Προταση

(E,ρ) μ.χ και $S\neq\emptyset$ και $S\subseteq E$ ωστε S πληρες $\subseteq E$

$\Rightarrow S$ κλειστο $\subseteq (E,\rho)$

Σε πληρη μ.χ τα υποσυνολα του ειναι ολα τα κλειστα (συμπερασμα των 2 προτασεων

Αποδειξη

Θδο S κλειστο

Εστω τυχαια $(a_n)_n \subseteq S_n$

①: $a_n \xrightarrow{\rho} \ell$ $\quad (\ell\in\bar{S} \Rightarrow \ell\in S,\ \bar{S}=S)$

Θδο $\ell\in S$

① $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλινουσα $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασικη στο E

$\Rightarrow (a_n)_n$ βασικη στο S και S πληρες

(a_n) συγκλινουσα $\Rightarrow \exists \ell'\in S : a_n \xrightarrow{\rho_S} \ell' \in S\subseteq E \Rightarrow$

$a_n \xrightarrow{\rho} \ell'$ αλλα $a_n \xrightarrow{\rho} \ell$ τοτε απο μοναδικοτητα οριου

$\ell=\ell'\in S$ δηλ $\ell\in S$

Προταση

Διονται (E_i,ρ_i) $i=1,2,\dots,k$ k μετρικοι χωροι. Ο (E,ρ) καρτεσιανος μ.χ τοτε τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα

1. (E,ρ) πληρης
2. $\forall i$ (E_i,ρ_i) πληρεις $i=1,\dots,k$

Αποδειξη

$(1\Rightarrow 2)$: Εστω τυχαιο $i\in\{1,2,\dots,k\}$. Θδο (E_i,ρ_i) πληρεις

Εστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E_i$ βασικη στον (E_i,ρ_i) θδο $\exists x\in E_i : x_n \xrightarrow{\rho_i} x$

Εστω (επιλεγουμε) $\ell_1\in E_1,\dots,\ell_{i-1}\in E_{i-1},\ \ell_{i+1}\in E_{i+1},\dots,\ell_k\in E_k$

$y_1=(\ell_1,\dots,\ell_{i-1},x_1,\ell_{i+1},\dots)\in E_1\times\dots\times E_k$

$y_2=(\ell_1,\dots,\ell_{i-1},x_2,\ell_{i+1},\dots)$

$y_3=(\ell_1,\dots,\ell_{i-1},x_3,\ell_{i+1},\dots)$

$\vdots$

$y_n=(\ell_1,\dots,\ell_{i-1},x_n,\ell_{i+1},\dots)$ ακολ στον E_i

Scanned by CamScanner

$(y_n) \subseteq E$. $\rho(y_n, y_m) = \rho_i(x_n, x_m)$

(x_n) ομως , ρ_i - βασικη

$\Rightarrow (y_n)$, (E,ρ) βασικη
(E,ρ) πληρης
$\Big\} \Rightarrow \exists\, y \in E : y_n \xrightarrow{\rho} y$

$\Rightarrow \exists\, x \in E_i : x_n \to x$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N} .\ x_n = y_{n,i})$

$(2 \Rightarrow 1)$ ασκηση για το σπιτι μαζι με το φυλλαδιο

Προταση

(E,ρ) μ.χ τοτε ο (E,ρ) ειναι πληρης αν.ν $\forall$ οικογενεια $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστα $\neq \emptyset$ και $\subseteq E$, $K_n \subseteq E$ με $\delta(K_n) \to 0$ $n \to 0 \Rightarrow \bigcap_{x\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ $\quad (K_{n+1} \subseteq K_n)$ φθινουσα

Σαν ασκηση:

Δ.ο $(0, \varepsilon]$ κλειστο στο $(0,1]$, $0 < \varepsilon \leq 1$

πχ $\quad$ Μικρο διαλειμμα πριν το διαλειμμα κανουμε!

$K_n = (0, 1/n]$ οχι κλειστο

$[0,1]$ πληρης

Ασκηση:

$(0, \varepsilon]$ οχι κλειστο στο $[0,1]$

Αποδειξη προτασης

$(\Rightarrow)$ Υποθετουμε οτι ο (E,ρ) πληρης και μας δινεται $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} : K_{n+1} \subseteq K_n$

K_n κλειστα , $K_n \neq \emptyset$, $\lim_n \delta(K_n) = 0$

ΘΔΟ $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$, $K_n \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ επιλεγουμε $a_n \in K_n$, $n = 1, 2, ..$

Σταθεροποιουμε ενα $n \in \mathbb{N}$ $\{a_m, m > n\} \subseteq K_n$

$a_n \in K_n$, $a_{n+1} \in K_{n+1} \subseteq K_n$

$\delta(\underbrace{\{a_m , m \geq n\}}_{\to 0}) \leq \delta(\underbrace{K_m}_{\to 0})$ αρα $\Leftarrow$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασικη στο $E \xRightarrow[\text{πληρης}]{(E,\rho)} a_n \xrightarrow{\rho} \ell$ για καποιο $\ell \in E$

Στοχος : $\ell \in \bigcap K_n$

Θδο για τυχαιο $n_0 \in \mathbb{N}$, $\ell \in K_{n_0}$

$a_n \xrightarrow{\rho} \ell$, $a_n \in K_{n_0}$, $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \ell \in \overline{K_{n_0}}$ ασκηση $\overline{K_{n_0}} = K_{n_0} \Rightarrow \ell \in K_{n_0} \Rightarrow \ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$

($\Leftarrow$) Εστω οτι ισχυει η ιδιοτητα που αναφεραμε

Θδο (E,ρ) πληρης (1)

Εστω "(a_n) βασικη στο E", θδο συγκλινει για καποιο $\ell \in E$

$K_1, K_2, \dots, K_n \subseteq E$, $\overline{\Lambda_n} = \{a_m : m \geq n\}$ (κλειστοτητα)

και $\Lambda_n = \{a_m : m \geq n\}$

(1) $\Rightarrow \delta(\Lambda_n) \to 0$ και $\underset{\delta(\Lambda_n)}{\delta(\overline{\Lambda_n})} = \delta(K_n) \to 0$

$\Lambda_{n+1} \subseteq \Lambda_n$ ισχυει? και

$\overline{\Lambda_{n+1}} \subseteq \overline{\Lambda_n} \Rightarrow K_{n+1} \subseteq K_n$ αρα φθινουσα και $\neq \emptyset$

Απο την ιδιοτητα $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset \Rightarrow \exists \ell \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$

Θδο $a_n \xrightarrow{\rho} \ell$

$\ell \in K_n$, $a_n \in K_n$ $\to$ Μας ενδιαφερει η αποσταση $\rho(a_n, \ell)$

$\rho(a_n, \ell) \leq \delta(K_n) \to 0$ (επειδη a_n βασικη) $\Rightarrow$

$a_n \xrightarrow{\rho} \ell$

Ασκηση

$A, B \subseteq E$, (E,ρ) μ.χ A, B πληρη $\subseteq E$.

Δ.ο $A \cap B$ και $A \cup B$ πληρη $\subseteq E$

Απαντηση

$A \cap B$ πληρες υποσυνολο του E

Αν δ.ο $A \cap B$ κλειστο (A, ρ_A) ο οποιος ειναι πληρης

τοτε $A \cap B$ πληρες

A, B κλειστά $\subseteq E$ (αφού είναι πλήρη) $\Rightarrow A \cap B$ κλειστό $\subseteq E$ (1)

Θέλουμε νδο $A \cap B$ κλειστό στο A με υπόθεση (1)

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \cap B$: (2) $x_n \xrightarrow{\rho_A} x$, με $x \in A$

θδο $x \in A \cap B$ (δηλ. $x \in B$)

(2) $\Rightarrow$ Έχουμε $\underset{B,\ B \text{ κλ.}}{\underset{\uparrow}{x_n}} \xrightarrow{\rho} x$ $\Big\} \Rightarrow x \in B$

A, B πλήρη $\Rightarrow A \cup B$ πλήρης

A, B πλήρη $\subseteq E \Rightarrow \bar{A} = A$, $\bar{B} = B \Rightarrow \overline{A \cup B} = A \cup B \Rightarrow$

$A \cup B$ κλειστό στο E

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \cup B$ βασική θδο είναι συγκλίνουσα στο $(A \cup B, \rho_{A \cup B})$ δηλ. $\exists x \in A \cup B$: $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Εφόσον $x_n \in A \cup B$ $\forall n = 1, 2, \dots$ $\exists k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$

ώστε $(x_{k_n}) \subseteq A$ (1)'

$(x_{k_n}) \subseteq B$ (1)''

αν (1)' $(x_{k_n}) \subseteq A$ πλήρης

Λήμμα: $(x_n)_n$ βασική $\Rightarrow (x_{k_n})$ βασική

το παίρνω ως δεδομένο, απόδειξη μετά

A πλήρες $\exists x \in A$: $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} \ell$ → ρ_E ή ρ_A ή $\rho_{A \cup B}$ επειδή x ανήκει σε όλα

επειδή $(x_n)_n$ βασική τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Λήμμα

(x_n) βασική $\Rightarrow \underbrace{(x_{k_n})}_{= \sigma_n}{}_n$ βασική

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$ θδο $\exists n_0' \in \mathbb{N}$: $\rho(x_{k_n}, x_{k_m}) < \varepsilon$ (2) $\forall n, m \geq n_0$

$\rho(\sigma_n, \sigma_m)$

Όμως η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασική στο $E \Rightarrow \exists n_0$: $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ (1) $\forall n, m \geq n_0$

Θέτουμε $n_0' = n$ τότε $\forall n, m \geq n_0$:

$k_n \geq n \geq n_0$ και $k_m \geq m \geq n_0$ τότε $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ (2)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ) Φυλλάδιο 1:

1. Θεωρία βιβλίων: $(E, \|\cdot\|)$ χώρος νορμικός (με νόρμα)

a) και $A, B \subseteq E$. Δ.ο. $\overline{A}+\overline{B} \subseteq \overline{A+B}$

όπου γενικά για 2 σύνολα $S, K \subseteq E$, $S+K = \{x+y : x \in S, y \in K\}$

b) Έστω V υπόχωρος του E. Δ.ο. $\overline{V}$ επίσης υπόχωρος του E

c) $A \subseteq E$ κλειστό υποσύνολο του E, $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Δ.ο. $x+A = \{x\}+A$, και $\lambda A = \{\lambda y : y \in A\}$ κλειστά $\subseteq E$

---

2. (E, ρ) μ.χ. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - 2 ακολουθίες του E

και $\ell \in E$ ώστε $a_n \to \ell$. Δείξτε ότι

$$b_n \to \ell \iff \rho(a_n, b_n) \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty$$

---

3. Έστω (E_1, ρ_1), (E_2, ρ_2) 2 - μ.χ. Η $f : E_1 \to E_2$ θα λέγεται ανοικτή αν (ορσ): $[\forall U \subseteq E_1$ ανοικτό $\Rightarrow f(U)$ ανοικτό $\subseteq E_2]$

Δείξτε ότι f ανοικτή $\iff \forall A \subseteq E_1$ ισχύει ότι

$$f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$$
